Valószínűségszámítás

Klasszikus valószínűség

1. Egy iskola sportegyesületében 50 kosaras sportol, közülük 17 atletizál is. Ebben az iskolában véletlenszerűen kiválasztunk egy kosarast. Mennyi a valószínűsége, hogy a kiválasztott tanuló atletizál is?

2. Egy öttagú társaság egymás után lép be egy ajtón. Mekkora a valószínűsége, hogy Anna, a társaság egyik tagja, elsőnek lép be az ajtón?

3. A szomszédos KÉK iskolában a tanulók magasságának eloszlását az alábbi táblázat mutatja.

kategória	180 cm-nél alacsonyabb	pontosan 180 cm magas	180 cm-nél magasabb
tanulók száma	560	8	48

A KÉK iskolában az iskolanapon az egyik szponzor sorsolást tartott. Az összes sorsjegyet a tanulók között osztották ki, minden tanuló kapott egy sorsjegyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az egyetlen főnyereményt egy legfeljebb 180 cm magas tanuló nyeri meg?

4. Egy zsákban nyolc fehér golyó van. Hány fekete golyót kell a zsákba tenni, hogy véletlenszerűen kiválasztva egy golyót, a fehér golyó kiválasztásának 0,4 legyen a valószínűsége, ha bármelyik golyót ugyanakkora valószínűséggel választjuk?

5. A jonatán alma mérete kisebb, mint az idaredé, így abból átlagosan 25%-kal több darab fér egy ládába, mint az idaredből. Rakodásnál mindkét fajtából kiborult egy-egy tele láda alma, és tartalmuk összekeveredett. A kiborult almákból véletlenszerűen kiválasztva egyet, mekkora a valószínűsége annak, hogy az jonatán lesz?

Klasszikus valószínűség (számelmélet)

6. Az alábbi kilenc szám közül egyet véletlenszerűen kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott szám nem negatív?

$$-3{,}5, \quad -5, \quad 6, \quad 8{,}4, \quad 0, \quad -2{,}5, \quad 4, \quad 12, \quad -11.$$

7. A 100-nál kisebb és hattal osztható pozitív egész számok közül véletlenszerűen választunk egyet. Mekkora valószínűséggel lesz ez a szám 8-cal osztható?

8. Sorolja fel azokat a 200-nál nagyobb háromjegyű számokat, amelyeknek számjegyei a felírás sorrendjében növekvő számtani sorozat tagjai! Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a kérdéses számok közül véletlenszerűen egyet kiválasztva, a kiválasztott szám osztható 9-cel!

9. Az autókereskedés parkolójában 1-től 25-ig vannak a számozott parkolóhelyek. Minden beérkező autó véletlenszerűen kap parkolóhely-számot. Az üres parkolóba elsőként beparkoló autó vezetőjének szerencseszáma a 7. Mekkora annak a valószínűsége, hogy a kapott parkolóhelyszámnak van hetes számjegye, vagy a szám hétnek többszöröse?

10. Tekintsük a következő halmazokat:

$$A = \{\text{a 100-nál nem nagyobb pozitív egész számok}\},$$
$$B = \{\text{a 300-nál nem nagyobb 3-mal osztható pozitív egész számok}\},$$
$$C = \{\text{a 400-nál nem nagyobb 4-gyel osztható pozitív egész számok}\}.$$

Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az A halmazból egy elemet véletlenszerűen kiválasztva a kiválasztott szám nem eleme sem a B, sem a C halmaznak!

Érmék, dobókockák

11. Egy kétforintos érmét kétszer egymás után feldobunk, és feljegyezzük az eredményt. Háromféle esemény következhet be. A esemény: két fejet dobunk. B esemény: az egyik dobás fej, a másik írás. C esemény: két írást dobunk. Mekkora a B esemény bekövetkezésének valószínűsége?

12. Szabályos pénzérmével háromszor dobunk egymás után. Adja meg a FEJ-ÍRÁS-FEJ dobássorozat valószínűségét!

13. Adja meg annak az eseménynek a valószínűségét, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva a dobott szám osztója a 60-nak!

14. Jelölje A azt az eseményt, hogy egy szabályos dobókockával egyszer dobva ötöst dobunk, B pedig azt, hogy két szabályos dobókockával egyszerre dobva a pontok összege 5 lesz. Határozza meg a két esemény valószínűségét!

15. Két különböző színű szabályos dobókockával egyszerre dobunk. Adja meg annak a valószínűségét, hogy a dobott számok szorzata prímszám lesz!

16. A „Ki nevet a végén?" nevű társasjátékban egy játékos akkor indulhat el a pályán, amikor egy szabályos dobókockával 6-ost dob. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy valaki pontosan a harmadik dobására indulhat el a pályán!

17. Egy szerencsejáték a következőképpen zajlik. A játékos befizet 7 forintot, ezután a játékvezető feldob egy szabályos dobókockát. A dobás eredményének ismeretében a játékos abbahagyhatja a játékot; ez esetben annyi Ft-ot kap, amennyi

a dobott szám volt. Dönthet azonban úgy is, hogy nem kéri a dobott számnak megfelelő pénzt, hanem újabb 7 forintért még egy dobást kér. A játékvezető ekkor újra feldobja a kockát. A két dobás eredményének ismeretében annyi forintot fizet ki a játékosnak, amennyi az első és a második dobás eredményének szorzata. Ezzel a játék véget ér.
Zsófi úgy dönt, hogy ha 3-nál kisebb az első dobás eredménye, akkor abbahagyja, különben pedig folytatja a játékot.

a) Mennyi annak a valószínűsége, hogy Zsófi tovább játszik?
b) Zsófi játékának megkezdése előtt számítsuk ki, mekkora valószínűséggel fizet majd neki a játékvezető pontosan 12 forintot?

Barnabás úgy dönt, hogy mindenképpen két dobást kér majd. Áttekinti a két dobás utáni lehetséges egyenlegeket: a neki kifizetett és az általa befizetett pénz különbségét.

c) Írja be a táblázat üres mezőibe a két dobás utáni egyenlegeket!
d) Mekkora annak a valószínűsége, hogy Barnabás egy (két dobásból álló) játszmában nyer?

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13					
	2						
	3						
	4						10
	5						
	6						

18. Egy játék egy fordulójában minden játékosnak egymás után háromszor kell dobnia egy szabályos dobókockával. Egy játékos egy fordulóban (a három dobásával) akkor nyer, ha

(1) mindhárom dobásának eredménye páros szám, ekkor a nyereménye 300 zseton,
(2) az elsőre dobott szám az 1-es, és a következő két dobás közül pontosan az egyik páros, ekkor a nyereménye 500 zseton,
(3) az első dobása 3-as, a többi pedig páratlan, ekkor a nyereménye 800 zseton,

(4) mindhárom dobott szám az 5-ös, ekkor a nyereménye 2000 zseton.

Mekkora valószínűséggel nyer egy játékos egy fordulóban 300 zsetont; 500 zsetont; 800 zsetont; 2000 zsetont? Mekkora annak a valószínűsége, hogy egy játékos egy fordulóban nem nyer zsetont?

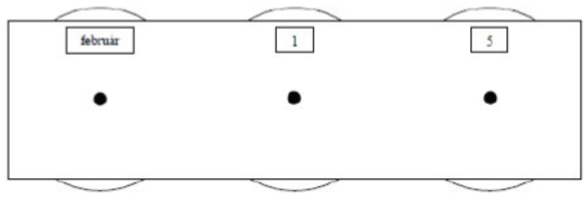
Klasszikus valószínűség

19. Egy iskola asztalitenisz bajnokságán hat tanuló vesz részt. Mindenki mindenkivel egy mérkőzést játszik. Eddig Andi egy mérkőzést játszott, Barnabás és Csaba kettőt-kettőt, Dani hármat, Enikő és Feri négyet-négyet. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a hat játékos közül kettőt véletlenszerűen kiválasztva, ők eddig még nem játszották le az egymás elleni mérkőzésüket!

20. Anna, Béla, Cili és Dénes színházba megy. Jegyük a bal oldal 10. sor 1., 2., 3., 4. helyére szól. Mekkora annak a valószínűsége, hogy Anna és Béla jegye egymás mellé szól, ha a fenti négy jegyet véletlenszerűen osztjuk ki közöttük?

21. Gabi elfelejtette a saját kódját. Arra emlékszik, hogy hatjegyű volt, két 3-as, két 4-es, egy 5-ös és egy 6-os számjegy szerepelt benne. Gabi az ilyen kódok közül véletlenszerűen kiválaszt egyet. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy éppen a helyes kódot választja ki!

22. A rajzterem falát (lásd az ábrán) egy naptár díszíti, melyen három forgatható korong található. A bal oldali korongon a hónapok nevei vannak, a másik két korongon pedig a napokat jelölő számjegyek forgathatók ki. A középső korongon a $0, 1, 2, 3$, a jobb szélsőn pedig a $0, 1, 2, 3, \ldots, 8, 9$ számjegyek szerepelnek. Az ábrán beállított dátum február 15. Ezzel a szerkezettel kiforgathatunk valóságos vagy csak a képzeletben létező „dátumokat". Összesen hány „dátum" forgatható ki? Mennyi a valószínűsége annak, hogy a három korongot véletlenszerűen megforgatva olyan dátumot kapunk, amely biztosan létezik az évben, ha az nem szökőév?



23. Egy kísérletben tíz darab 1-től 10-ig megszámozott fehér golyót tesznek a dobozba. Négy golyót húznak egymás után visszatevéssel. Mennyi annak a valószínűsége, hogy a négy kihúzott golyóra írt szám szorzata 24?

24. Egy memóriajáték 30 olyan egyforma méretű lapból áll, melyek egyik oldalán egy- egy egész szám áll az $1, 2, 3, \ldots, 14, 15$ számok közül. Mindegyik szám pontosan két lapon szerepel. A lapok másik oldala (a hátoldala) teljesen azonos mintázatú. A 30 lapot összekeverjük. A játék kezdetén a lapokat az asztalra helyezzük egymás mellé, hátoldalukkal felfelé fordítva, így a számok nem látszanak. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy a játék kezdetén két lapot véletlenszerűen kiválasztva a lapokon álló számok megegyeznek!

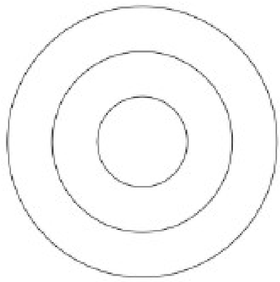
25. Minőségellenőrzéskor kiderült, hogy 100 készülék között 12 hibás van, a többi 88 jó. A 100 készülékből véletlenszerűen, egyesével kiválasztunk 6-ot úgy, hogy a kiválasztott készülékeket rendre visszatesszük. Mekkora annak a valószínűsége, hogy nincs a kiválasztott készülékek között hibás? Válaszát tizedes tört alakban adja meg!

26. Egy televíziós játékban 5 kérdést tehet fel a játékvezető. A játék során a versenyző, ha az első kérdésre jól válaszol, 40 000 forintot nyer. Minden további kérdés esetén döntenie kell, hogy a játékban addig megszerzett pénzének 50, 75 vagy 100 százalékát teszi-e fel. Ha jól válaszol, feltett pénzének kétszeresét kapja vissza, ha hibázik, abba kell hagynia a játékot, és a fel nem tett pénzét viheti haza. Egy versenyző mind az 5 fordulóban jól válaszol, és közben minden fordulóban azonos eséllyel teszi meg a játékban megengedett lehetőségek valamelyikét. Mennyi annak a valószínűsége, hogy az elnyerhető maximális pénzt viheti haza?

27. A Matematika Határok Nélkül versenyre a középiskolák 9. osztályai jelentkezhetnek. A versenyen résztvevő minden osztály ugyanabban az időben, ugyanazt a feladatsort oldja meg. Az alábbi táblázat 28 osztálynak a versenyen elért eredményét tartalmazza. A versenyszervezők a táblázatban felsorolt 28 osztály dolgozatai közül a hat legjobban sikerült dolgozat javítását ellenőrzik. Ezt a hat dolgozatot véletlenszerű sorrendben egymásra helyezik. Mekkora a valószínűsége annak, hogy legfelül 83 pontos, közvetlenül alatta pedig 76 pontos dolgozat fekszik?

Elért pontszám	83	76	69	67	65	61	60	58	56	55
Gyakoriság	2	4	2	2	4	3	2	4	4	1

28. Egy ajándéktárgyak készítésével foglalkozó kisiparos családi vállalkozása keretében zászlókat, kitűzőket is gyárt. Az ábrán az egyik általa készített kitűző stilizált képe látható. A kitűzőn lévő három mező kiszínezéséhez 5 szín (piros, kék, fehér, sárga, zöld) közül választhat. Egy mező kiszínezéséhez egy színt használ, és a különböző mezők lehetnek azonos színűek is. A kisiparos elkészíti az összes lehetséges különböző (egy-, két- és háromszínű) kitűzőt egy-egy példányban, és véletlenszerűen kiválaszt közülük egyet. Mennyi annak a valószínűsége, hogy olyan kitűzőt választ, amelyen az egyik mező kék, egy másik sárga, a harmadik pedig zöld színű?



29. Zsófi a gyertyák öntéséhez három különböző fajta „varázskanócot” használ. Mindegyik fajta „varázskanóc” fehér színű, de meggyújtáskor (a benne lévő anyagtól függően) az egyik fajta piros, a másik lila, a harmadik narancssárga lánggal ég. Zsófi hétfőn egy dobozba tesz 6 darab gyertyát, mindhárom fajtából kettőt-kettőt. Keddtől kezdve minden nap véletlenszerűen kivesz egy gyertyát a dobozból, és meggyújtja. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Zsófi az első három nap három különböző színű lánggal égő gyertyát gyújt meg!

30. András és Péter „számkártyázik” egymással. A játék kezdetén mindkét fiúnál hat-hat lap van: az $1, 2, 3, 4, 5, 6$ számkártya. Egy mérkőzés hat csata megvívását jelenti, egy csata pedig abból áll, hogy András és Péter egyszerre helyez el az asztalon egy-egy számkártyát. A csatát az nyeri, aki a nagyobb értékű kártyát tette le. A nyertes elviszi mindkét kijátszott lapot. (Például ha András a 4-est, Péter a 2-est teszi le, akkor András viszi el ezt a két lapot.) Ha ugyanaz a szám szerepel a két kijátszott számkártyán, akkor a csata döntetlenre végződik. Ekkor mindketten egy-egy kártyát visznek el. Az elvitt kártyákat a játékosok maguk előtt helyezik el, ezeket a továbbiakban már nem játsszák ki.
A harmadik mérkőzés hat csatája előtt András elhatározta, hogy az első csatában a 2-es, a másodikban a 3-as számkártyát teszi majd le, Péter pedig úgy döntött, hogy ő véletlenszerűen játssza ki a lapjait (alaposan megkeveri a hat kártyát, és mindig a felül lévőt küldi csatába). Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy az első két csatát Péter nyeri meg!

Visszatevés nélküli mintavétel (kombináció)

31. Az osztály lottót szervez, melyben az $1, 2, 3, 4, 5$ számok közül húznak ki hármat. Tamás a $2, 3, 5$ számokat jelöli be a szelvényen. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy Tamásnak telitalálata lesz!

32. Egy fa építőjáték-készlet négyféle, különböző méretű téglatestfajtából áll. A készletben a különböző méretű elemek mindegyikéből 10 db van. Az egyik téglatest, nevezzük alapelemnek, egy csúcsából induló éleinek hossza: 8 cm, 4 cm, 2 cm.

A többi elem méreteit úgy kapjuk, hogy az alapelem valamelyik 4 párhuzamos élének a hosszát megduplázzuk, a többi él hosszát pedig változatlanul hagyjuk. A teljes készletből öt elemet kiveszünk. (A kiválasztás során minden elemet azonos valószínűséggel választunk.) Mekkora valószínűséggel lesz mind az öt kiválasztott elem négyzetes oszlop? (A valószínűség értékét három tizedesjegy pontossággal adja meg!)

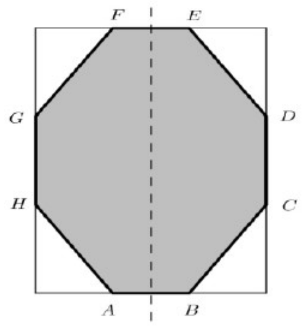
33. 32 tanuló jár az A osztályba, 28 pedig a B-be. Egy ünnepélyen a két osztályból véletlenszerűen kiválasztott 10 tanulóból álló csoport képviseli az iskolát. Mennyi annak a valószínűsége, hogy mind a két osztályból pontosan 5-5 tanuló kerül a kiválasztott csoportba?

34. Nyelvtudásomat új szavak megtanulásával fejlesztem. Az első napon, hétfőn nyolc új szót tanulok, a hét további napjain, péntekig naponként hárommal többet, mint az előző napon. A szombat és a vasárnap az ellenőrzés, a felmérés napja, – ekkor veszem észre, hogy sajnos a szavak ötödét elfelejtem. Hány új szót tudok egy hét elteltével? Valószínűségi próbát végzek az első héten tanult szavakból. Véletlenszerűen kiválasztok közülük kettőt. Mi annak a valószínűsége, hogy mindkettőt tudom?

35. Egy ruházati nagykereskedés raktárában az egyik fajta szövetkabátból már csak 20 darab azonos méretű és azonos színű kabát maradt; ezek között 9 kabáton apró szövési hibák fordulnak elő. A nagykereskedés eredetileg darabonként 17 000 Ft-ért árulta a hibátlan és 11 000 Ft-ért a szövési hibás kabátokat. A megmaradt 20 kabát darabját azonban már egységesen 14000 Ft-ért kínálja. Egy kiskereskedő megvásárolt 15 darab kabátot a megmaradtakból. Ezeket egyenlő valószínűséggel választja ki a 20 kabát közül. Számítsa ki, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztott kabátok között legfeljebb 5 olyan van, ami szövési hibás! (A valószínűséget három tizedesjegyre kerekítve adja meg!)

36. Minőségellenőrzéskor kiderült, hogy 100 készülék között 12 hibás van, a többi 88 jó. A 100 készülék közül véletlenszerűen, de visszatevés nélkül választunk ki 6 darabot. Melyik esemény bekövetkezésének nagyobb a valószínűsége: A kiválasztott készülékek között nincs hibás, vagy közöttük legalább két hibás készülék van?

37. A papírlapon a nyolcszög oldalait piros színnel rajzoljuk át, és mind a 20 átlóját kék színnel húzzuk be. Számítsa ki annak valószínűségét, hogy az így kiszínezett 28 szakaszból hármat véletlenszerűen kiválasztva 1 piros és 2 kék lesz a kiválasztott szakaszok között!



Visszatevéses mintavétel (binomiális eloszlás)

38. Az egyik csokoládégyárban egy újfajta, kúp alakú desszertet gyártanak. Az elkészült csokoládéváz üreges belsejébe marcipángömböt helyeznek. A marcipángömböket gyártó gép működése nem volt hibátlan. A mintavétellel végzett minőség-ellenőrzés kiderítette, hogy a legyártott gömbök 10%-ában a marcipángömb mérete nem felel meg az előírtnak. A már legyártott nagy mennyiségű gömb közül 10-et kiválasztva, mekkora annak a valószínűsége, hogy a kiválasztottak között pontosan 4-nek a mérete nem felel meg az előírásnak? (A kérdezett valószínűség kiszámításához használhatja a binomiális eloszlás képletét.)

39. A tejfölös dobozok gyártása során a dobozok 3%-a megsérül, selejtes lesz. Az ellenőr a gyártott dobozok közül visszatevéssel 10 dobozt kiválaszt. Mennyi a valószínűsége annak, hogy a 10 doboz között lesz legalább egy selejtes? Válaszát két tizedesjegyre kerekítve adja meg!

40. Egy focicsapat edzésén a játékosok a tizenegyesrúgást gyakorolják. Az egyik játékos 0,9 valószínűséggel lövi be a tizenegyest. Mennyi a valószínűsége annak, hogy három rúgásból legalább egyszer betalál? A valószínűség pontos értékét adja meg!

41. A kertészetben a sok virághagymának csak egy része hajt ki: $0,91$ annak a valószínűsége, hogy egy elültetett virághagyma kihajt. Számítsa ki annak a valószínűségét, hogy 10 darab elültetett virághagyma közül legalább 8 kihajt! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

Végeredmények

1. 0,34.

2. 0,2.

3. $\frac{568}{616}$.

4. 12.

5. $\frac{5}{9}$.

6. $\frac{5}{9}$.

7. $\frac{4}{16}$.

8. $\frac{1}{3}$.

9. $\frac{4}{25}$.

10. 0,5.

11. 0,5.

12. 0,125.

13. 1.

14. $P(A) = \frac{1}{6}$ és $P(B) = \frac{1}{9}$.

15. $\frac{1}{6}$.

16. $\frac{25}{216}$.

17. a) $\frac{2}{3}$, b) $\frac{1}{12}$, d) $\frac{13}{26}$. c)

		második dobás eredménye					
		1	2	3	4	5	6
első dobás eredménye	1	-13	-12	-11	-10	-9	-8
	2	-12	-10	-8	-6	-4	-2
	3	-11	-8	-5	-2	1	4
	4	-10	-6	-2	2	6	10
	5	-9	-4	1	6	11	16
	6	-8	-2	4	10	16	22

18. $\frac{1}{8}, \frac{1}{12}, \frac{1}{24}, \frac{1}{216}. \frac{161}{216}$.

19. $\frac{7}{15}$.

20. 0,5.

21. $\dfrac{1}{180}$.

22. $\dfrac{365}{480}$.

23. 0,0064.

24. $\dfrac{1}{29}$.

25. $0,88^6 \approx 0{,}4644$.

26. $\dfrac{1}{81}$.

27. $\dfrac{8}{30}$.

28. $\dfrac{6}{125}$.

29. $\dfrac{48}{120}$.

30. $\dfrac{9}{30}$.

31. 0,1.

32. $\dfrac{\binom{20}{5}}{\binom{40}{5}} \approx 0{,}024$.

33. $\dfrac{\binom{32}{5} \cdot \binom{28}{5}}{\binom{60}{10}} \approx 0{,}26$.

34. 56 szót. $\dfrac{\binom{56}{2}}{\binom{70}{2}} \approx 0{,}638$.

35. $\dfrac{1512}{15504}$.

36. Annak a valószínűsége nagyobb, hogy nincs hibás.

37. Közelítőleg 0,464.

38. $\binom{10}{4} \cdot 0{,}1^4 \cdot 0{,}9^6 \approx 0,011$.

39. 0,26.

40. 0,999.

41. 0,946.