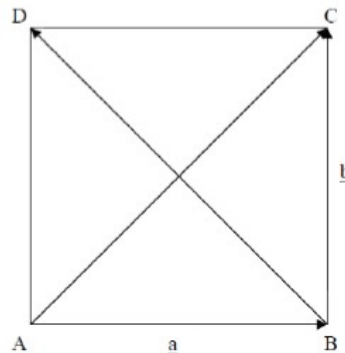


Koordinátageometria

Műveletek vektorokkal grafikusan

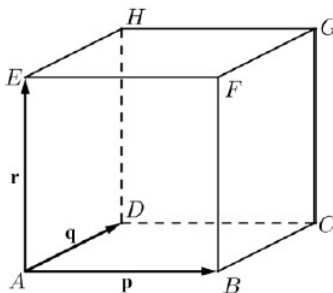
1. Az $ABCD$ négyzet oldalvektorai közül $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$ és $\vec{b} = \overrightarrow{BC}$. Adja meg az \overrightarrow{AC} és \overrightarrow{BD} vektorokat \vec{a} és \vec{b} vektorral kifejezve!



2. Az ABC háromszög két oldalának vektora $\overrightarrow{AB} = \mathbf{c}$ és $\overrightarrow{AC} = \mathbf{b}$. Fejezze ki ezek segítségével az A csúcsból a szemközti oldal F felezőpontjába mutató \overrightarrow{AF} vektort!

3. Az $ABCD$ négyzet középpontja K , az AB oldal felezőpontja F . Legyen $\vec{a} = \overrightarrow{KA}$ és $\vec{b} = \overrightarrow{KB}$ vektorok. Adja meg a \overrightarrow{KF} vektort \vec{a} és \vec{b} vektorral kifejezve!

4. Az ábrán látható kocka A csúcsából kiinduló élvektorai $\overrightarrow{AB} = \mathbf{p}$, $\overrightarrow{AD} = \mathbf{q}$ és $\overrightarrow{AE} = \mathbf{r}$. Fejezze ki \mathbf{p} , \mathbf{q} és \mathbf{r} segítségével a \overrightarrow{GC} , az \overrightarrow{AG} és az \overrightarrow{FH} vektorokat!



5. Az \overrightarrow{AB} és \overrightarrow{AC} vektorok 120° -os szöget zárnak be egymással, és mindkét vektor hossza 5 egység. Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát! Számítsa ki az $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$ vektor hosszát!

Műveletek vektorkoordinátákkal

6. Fejezze ki az \mathbf{i} és a \mathbf{j} vektorok segítségével a $\mathbf{c} = 2\mathbf{a} - \mathbf{b}$ vektort, ha $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j}$ és $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$!
7. Adottak az $\mathbf{a} = (6; 4)$ és az $\mathbf{a} - \mathbf{b} = (11; 5)$ vektorok. Adja meg a \mathbf{b} vektort a koordinátáival!

Vektorok hossza, skaláris szorzata

8. Adott az $\mathbf{a}(4; 3)$ vektor. Adja meg \mathbf{a} hosszát!
9. Számítsa ki a következő vektorok skaláris szorzatát! Határozza meg a két vektor által bezárt szöget!

$$\mathbf{a}(5; 8) \quad \text{és} \quad \mathbf{b}(-40; 25).$$

10. Tekintsük a koordináta-rendszerben adott $A(6; 9)$, $B(-5; 4)$, $C(-2; 1)$ pontokat! Igazolja (számítással), hogy az ABC háromszög C csúcsánál derékszög van!

Felezőpont, harmadolópont, súlypont

11. Adott két pont: $A(-4; 1/2)$, $B(1; 3/2)$. Írja fel az AB szakasz felezőpontjának koordinátáit!
12. Az ABC háromszög két csúcsa $A(-3; -1)$ és $B(3; 7)$, súlypontja az origó. Határozza meg a C csúcs koordinátáit!
13. A $PRST$ rombusz középpontja a $K(4; -3)$ pont, egyik csúcspontja a $T(7; 1)$ pont. Tudjuk, hogy az RT átló hossza fele a PS átló hosszának. Adja meg a P , az R és az S csúcsok koordinátáit!

Szakasz hossza

14. Egy háromszög csúcsainak koordinátái: $A(-2; -1)$, $B(9; -3)$ és $C(-3; 6)$. Számítsa ki a BC oldallal párhuzamos középvonal hosszát!
15. Adott a koordináta-rendszerben két pont: $A(1; -3)$ és $B(7; -1)$. Számítsa ki az AB húr hosszát.
16. Az ABC háromszög csúcspontjainak koordinátái: $A(0; 0)$, $B(-2; 4)$, $C(4; 5)$. Számítsa ki az ABC háromszög legnagyobb szögét! A választ tized fokra kerekítve adja meg!

Egyenesek metszéspontja

17. Adja meg a $3x + 2y = 18$ egyenletű egyenes és az y tengely metszéspontjának koordinátáit!

18. Adott két egyenes: $e : 5x - 2y = -14,5$ és $f : 2x + 5y = 14,5$. Határozza meg a két egyenes P metszéspontjának koordinátáit!

Egyenesek egyenletei (normálvektor, irányvektor, meredekség, irányszög)

19. Adja meg az alábbi állítások logikai értékét (igaz vagy hamis)! Az $(1; -1)$ pont rajta van az $5x - 3y = 2$ egyenletű egyenesen.

20. Adott egy egyenes: $e : 5x - 2y = -14,5$. Számítsa ki az e egyenes meredekségét és az x tengellyel bezárt szögét!

21. Az e egyenesről tudjuk, hogy a meredeksége 12 és az y tengelyt 4-ben metszi. Mutassa meg, hogy a $P(2; 5)$ pont rajta van az e egyenesen!

22. Írja fel a $(-2; 7)$ ponton átmenő $n(5; 8)$ normálvektorú egyenes egyenletét!

Párhuzamos, merőleges vektorok, egyenesek

23. Adja meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)! Az $x + 2y = 7$ és a $2x + 4y = 7$ egyenletű egyenesek párhuzamosak.

24. Az e egyenes egyenlete: $3x + 7y = 21$. A g egyenes egyenlete: $y = -\frac{3}{7}x + 5$. Igazolja, hogy az e és g egyenesek párhuzamosak egymással!

25. Adott két egyenes $e : 5x - 2y = -14,5$ és $f : 2x + 5y = 14,5$. Igazolja, hogy az e és az f egyenesek egymásra merőlegesek!

26. Három egyenes egyenlete a következő (a és b valós számokat jelölnek):

$$e : y = -2x + 3, \quad f : y = ax - 1, \quad g : y = bx - 4.$$

Milyen számot írjunk az a helyére, hogy az e és f egyenesek párhuzamosak legyenek? Melyik számot jelöli b , ha a g egyenes merőleges az e egyenesre?

27. Írja fel annak az egyenesnek az egyenletét, amely átmegy a $P_0(3; -5)$ ponton és párhuzamos a $4x + 5y = 0$ egyenletű egyenessel!

28. Az e egyenes egyenlete: $3x + 7y = 1$. Az f egyenes illeszkedik a $Q(1; -2)$ pontra, és merőleges az e egyenesre. Írja fel az f egyenes egyenletét!

Két adott ponton átmenő egyenes egyenlete

29. Tekintsük a koordináta-rendszerben adott $A(6; 9)$, $B(-5; 4)$ és $C(-2; 1)$ pontokat! Írja fel az AB oldalegyenes egyenletét!

30. A PQR háromszög csúcsai: $P(-6; -1)$, $Q(6; -6)$ és $R(2; 5)$. Írja fel a háromszög P csúcsához tartozó súlyvonal egyenesének egyenletét!

Kör egyenlete

31. Egy kör az $(1; 0)$ és $(7; 0)$ pontokban metszi az x tengelyt. Tudjuk, hogy a kör középpontja az $y = x$ egyenletű egyenesre illeszkedik. Írja fel a kör középpontjának koordinátáit! Válaszát indokolja!

32. Egy kör érinti az y tengelyt. A kör középpontja a $K(-2; 3)$ pont. Adja meg a kör sugarát, és írja fel az egyenletét!

33. Adja meg az $x^2 + (y + 1)^2 - 4 = 0$ egyenletű kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!

34. Adott a síkon az $x^2 + y^2 + 2x - 2y - 47 = 0$ egyenletű kör. Állapítsa meg, hogy az $A(7; 7)$ pont illeszkedik-e a körre! Határozza meg a kör középpontjának koordinátáit és a kör sugarát!

35. Adott az $A(-3; -1)$ és a $B(3; 7)$ pont. Számítsa ki, hogy az x tengely melyik pontjából látható derékszögben az AB szakasz!

Kör és egyenes metszéspontja, érintő

36. Adott az $x + 2y = 13$ egyenletű e egyenes és az $x^2 + (y + 1)^2 - 45 = 0$ egyenletű k kör. Számítással igazolja, hogy az e egyenesnek és a k körnek egyetlen közös pontja van!

37. Adott az $A(5; 2)$ és a $B(-3; -2)$ pont. Írja fel annak az f egyenesnek az egyenletét, amely az AB átmérőjű kört a B pontban érinti!

38. Egy k kör középpontja a $C(2; -5)$ pont, és ez a kör érinti a $3x - 2y - 3 = 0$ egyenletű e egyenest. Számítsa ki az érintési pont koordinátáit, és írja fel a k kör egyenletét!

Végeredmények

1. $\overrightarrow{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\overrightarrow{BD} = \vec{b} - \vec{a}$.
2. $\overrightarrow{AF} = \frac{\vec{b} + \vec{c}}{2}$.
3. $\overrightarrow{KF} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$.
4. $\overrightarrow{GC} = -\vec{r}$, $\overrightarrow{AG} = \vec{p} + \vec{q} + \vec{r}$, $\overrightarrow{FH} = \vec{q} - \vec{p}$.
5. Az összegvektor hossza 5 egység, a különbség vektor hossza közelítőleg 8,66 egység.
6. $\vec{c} = 7\vec{i} - 9\vec{j}$.
7. $\vec{b}(-5; -1)$.
8. $|\vec{a}| = 5$.
9. 90° .
10. A \overrightarrow{CA} és \overrightarrow{CB} vektorok skaláris szorzata 0.
11. $F(-\frac{3}{2}; 1)$.
12. $C(0; -6)$.
13. $P(-4; 3)$, $R(1; -7)$, $S(12; -9)$.
14. 7,5.
15. $1^2 + (-3)^2 - 6 \cdot 1 - 2 \cdot (-3) = 10$, tehát az A pont illeszkedik a k körre, $7^2 + (-1)^2 - 6 \cdot 7 - 2 \cdot (-1) = 10$, tehát a B pont is illeszkedik a k körre.
16. A legnagyobb szög közelítőleg $72,9^\circ$.
17. A metszéspont: $(0; -\frac{2}{3})$.
18. $P(-1,5; 3,5)$.
19. Hamis.
20. Az egyenes meredeksége 2,5, az x tengellyel bezárt szög közelítőleg $68,2^\circ$.
21. Az egyenes egyenlete $y = \frac{1}{2}x + 4$, mivel $5 = \frac{1}{2} \cdot 2 + 4$, ezért P rajta van az egyenesen.
22. $5x + 8y = 46$.
23. Igaz.
24. Mindkét egyenes meredeksége $-\frac{3}{7}$.
25. Az egyenesek meredekségeinek szorzata -1 , tehát a két egyenes merőleges.
26. $a = -2$, $b = \frac{1}{2}$.

27. $4x + 5y = -13$.
28. $-7x + 3y = -13$.
29. $-5x + 11y = 69$.
30. $x - 20y = 14$.
31. $O(4; 4)$.
32. A kör sugara $r = 2$, egyenlete $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4$.
33. A kör középpontja $(0; -1)$, sugara 2 (egység).
34. Nem illeszkedik. A kör középpontja $(-1; 1)$, sugara 7 (egység).
35. $P_1(-4; 0)$ és $P_2(4; 0)$.
36. Az egyenletrendszernek pontosan egy megoldása van $(x = 3, y = 5)$, így az egyenesnek és a körnek valóban pontosan egy közös pontja van.
37. $8x + 4y = -32$.
38. Az érintési pont $E(-1; -3)$, a kör egyenlete $(x - 2)^2 + (y + 5)^2 = 13$.