

Hatvány – gyök – logaritmus

Hatványozás azonosságai

1. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz-e vagy hamis! Ha két szám négyzete egyenlő, akkor a számok is egyenlők.
2. Döntse el az alábbi állításról, hogy igaz vagy hamis! Két valós szám közül az a nagyobb, amelyiknek a négyzete nagyobb.
3. Ideális laboratóriumi körülmények között a kólibaktériumok gyorsan és folyamatosan osztódnak, számuk 15 percenként megduplázódik. Egy tápoldat kezdetben megközelítőleg 3 millió kólibaktériumot tartalmaz. Hány baktérium lesz a tápoldatban 1,5 óra elteltével?
4. Egy bomlási folyamatban a radioaktív részecskék száma kezdetben $6 \cdot 10^{23}$, amely érték percenként az előző érték századrészére csökken. Számítsa ki a radioaktív részecskék számát 10 perc elteltével!
5. Legyen $X = 6 \cdot 10^{40}$ és $Y = 4 \cdot 10^{61}$. Írja fel az $X \cdot Y$ szorzat normál alakját!
6. Írja fel a következő kifejezést úgy, hogy ne szerepeljen benne negatív kitevő!

$$\left(\frac{x}{y}\right)^{-2}$$

7. Írja fel a egész kitevőjű hatványaként a következő t törtet, ahol a pozitív valós számot jelöl!

$$t = \frac{(a^3)^5}{a^{-2}}$$

Exponenciális egyenlet (egy-egy tag)

8. Melyik x valós szám esetén igaz a következő egyenlőség?

$$2^{-x} = 8$$

9. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$5^{2-|x|} = \frac{1}{5}$$

10. Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$9^{\sqrt{x}} = 3^{x-3}$$

11. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán!

$$3 \cdot 2^{x-1} = 0,375$$

12. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$25^{\sqrt{x}} = 5 \cdot 5^{3\sqrt{x}}$$

13. Oldja meg a következő egyenletet a valós számok halmazán! Válaszát három tizedesjegyre kerekítve adja meg!

$$2^x = 10$$

Exponenciális egyenlet (több tag)

14. Adja meg az x négy tizedesjegyre kerekített értékét!

$$4 \cdot 3^x + 3^x = 20$$

15. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$5^{x+1} + 5^{x+2} = 30$$

Exponenciális egyenlőtlenség

16. Mely pozitív egész számokra igaz a következő egyenlőtlenség?

$$5^{x-2} < 5^{13-2x}$$

Másodfokúra visszavezethető exponenciális egyenlet

17. Oldja meg a következő egyenletet.

$$9^x - 2 \cdot 3^x - 3 = 0$$

Műveletek gyökös kifejezésekkel

18. Adja meg az alábbi állítás logikai értékét (igaz vagy hamis)!

$$\sqrt{(-5)^2} = 5$$

19. Végezze el a kijelölt műveletet, ahol a és b nemnegatív valós számot jelöl.

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2$$

Négyzetgyökös egyenlet

20. Adja meg azt az x valós számot, melyre a következő egyenlőség teljesül!

$$\frac{1}{2}\sqrt{x} = 2$$

21. Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\sqrt{x+2} = x$$

22. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$x + 4 = \sqrt{4x + 21}$$

23. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet!

$$4y - 5 = 8\sqrt{y}$$

Értelmezési tartomány vizsgálat

24. Adja meg a valós számok halmazának azt a legbővebb részhalmazát, amelyen a kifejezés értelmezhető!

$$\sqrt{-x}$$

25. Mely valós számokra teljesül a következő egyenlőtlenség.

$$\frac{-3}{\sqrt{10-x}} < 0$$

Logaritmus fogalma

26. Melyik x természetes számra teljesül?

$$\log_3 81 = x$$

27. Adja meg z pontos értékét. Jelölje z helyét számegyenesen!

$$\log_4 z = -\frac{1}{2}$$

28. Melyik a nagyobb? Válaszát indokolja!

$$A = \sin \frac{7\pi}{2} \quad \text{vagy} \quad B = \log_2 \frac{1}{4}$$

29. Adja meg a következő összeg értékét: $\log_6 2 + \log_6 3$.

30. Az $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 + \log_2 x$ függvény az alább megadott függvények közül melyikkel azonos?

1. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 3 \log_2 x$
2. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_2 8x$
3. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_2 3x$
4. $\mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \log_2 x^3$

31. Az a, b és c tetszőleges pozitív valós számokat jelölnek. Válassza ki, hogy melyik kifejezés adja meg helyesen x értékét!

$$\lg x = 3 \cdot \lg a - \lg b + \frac{1}{2} \cdot \lg c$$

A) $x = \frac{3a}{b} + \frac{1}{2}c$

B) $x = a^3 - b + \sqrt{c}$

C) $x = \frac{a^3}{b\sqrt{c}}$

D) $x = \frac{a^3 c^{-1}}{b}$

E) $x = a^3 - b\sqrt{c}$

F) $x = \frac{a^3 \sqrt{c}}{b}$

G) $x = \frac{a^3 \cdot \frac{1}{c}}{b}$

32. A b, c és d pozitív számokat jelölnek. Fejezze ki az egyenlőségből b -t úgy, hogy abban c és d logaritmusai ne szerepeljen!

$$\lg b = \frac{\lg c - \lg d}{3}$$

Logaritmusos egyenlet

33. Mekkora x értéke?

$$\lg x = \lg 3 + \lg 25$$

34. Oldja meg az alábbi egyenletet a valós számok halmazán!

$$\lg(2x - 5) = \lg x - \lg 3$$

35. Számítsa ki az x értékét.

$$\log_5 x = \log_3 9$$

36. Adja meg azokat az x valós számokat, melyekre teljesül az egyenlet. Válaszát indokolja!

$$\log_2 x^2 = 4$$

37. Mely valós számokra értelmezhető a kifejezés? Oldja meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet!

$$\log_2(3 - x) = 0$$

38. Oldja meg a 3-nál nagyobb valós számok halmazán az egyenletet!

$$\lg(x - 3) + 1 = \lg x$$

39. Oldja meg az alábbi egyenletet!

$$\log_3(\sqrt{x+1} + 1) = 2$$

40. Határozza meg az alábbi egyenlet valós megoldásait!

$$(\log_2 x - 3) \cdot (\log_2 x^2 + 6) = 0$$

Logaritmusos egyenlet szöveges feladatban

41. Egy új típusú, az alacsonyabb nyomások mérésére kifejlesztett műszer tesztelése során azt tapasztalták, hogy a műszer által mért p_m és a valódi p_v nyomás között a következő összefüggés áll fenn:

$$\lg p_m = 0,8 \cdot \lg p_v + 0,301.$$

A műszer által mért és a valódi nyomás egyaránt pascal (Pa) egységekben szerepel a képletben.

- (1) Mennyit mér az új műszer 20 Pa valódi nyomás esetén?
- (2) Mennyi valójában a nyomás, ha a műszer 50 Pa értéket mutat?

(3) Mekkora nyomás esetén mutatja a műszer a valódi nyomást?

A pascalban kiszámított értékeket egész számra kerekítve adja meg!

42. A szociológusok az országok statisztikai adatainak összehasonlításánál használják a következő tapasztalati képletet:

$$\hat{E} = 75,5 - 5 \cdot 10^{\frac{6000-G}{6090}}.$$

A képletben az \hat{E} a születéskor várható átlagos élettartam években, G az ország egy főre jutó nemzeti összterméke (a GDP) reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra.

- (1) Mennyi volt 2005-ben a várható élettartam abban az országban, amelyben akkor a G nagysága 1090 dollár volt?
- (2) Mennyivel változhat ebben az országban a várható élettartam 2020-ra, ha a gazdasági előrejelzések szerint ekkorra G értéke a 2005-ös szint háromszorosára nő?
- (3) Egy másik országban 2005-ben a születéskor várható átlagos élettartam 68 év. Mekkora volt ekkor ebben az országban a GDP (G) nagysága (reálértékben, átszámítva 1980-as dollárra)?

Végeredmények

1. Hamis.
2. Hamis.
3. 192 millió.
4. 6000.
5. $X \cdot Y = 2,4 \cdot 10^{102}$.
6. $\frac{y^2}{x^2}$.
7. a^{17} .
8. -3 .
9. 3 és -3 .
10. 9.
11. -2 .
12. Nincs megoldás.
13. $x = \log_2 10 \approx 3,322$.

14. $x = \log_3 4 \approx 1,2619$.
15. 0.
16. 1, 2, 3, 4.
17. 1.
18. Igaz.
19. $a^2 - 2\sqrt{ab} + b^2$.
20. 16.
21. 2, (-1 hamis gyök).
22. 1, (-5 hamis gyök).
23. $\frac{25}{4}$.
24. $] -\infty; 0]$.
25. $x < 10$.
26. 4.
27. 0,5.
28. $A > B$.
29. A másodikkal.
30. F.
31. $b = \left(\frac{c}{d}\right)^{\frac{1}{3}}$.
32. 75.
33. 3.
34. 25.
35. 4, -4.
36. $x < 3, x = 2$.
37. $\frac{10}{3}$.
38. 63.
39. $\frac{1}{8}$.
40. $p_m \approx 22$ (Pa), $p_v \approx 56$ (Pa), $p \approx 32$ (Pa).
41. (1) 43,5 év, (2) 18 évvel, (3) 4928 dollár.