

Válogatás a Hajós György Matematikaversenyen¹ kitűzött feladatok közül

(2015/1) Egy számtani sorozat első három eleme a_1, a_2, a_3 . Az elemekből rendre 2010-et kivonva, három olyan számhoz jutunk, amelyek az

$$x^3 - 15x^2 + 71x + c = 0$$

paraméteres harmadfokú egyenlet gyökei. Határozza meg a c paraméter értékét, továbbá a számtani sorozat első három elemét!

(2017/1) Adott az

$$a_n = 1 - \frac{2}{1 + n^3}, \quad n = 2, 3, \dots$$

sorozat. Számítsa ki a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n$$

határértéket.

(2013/3) Bizonyítsa be, hogy minden n pozitív egész számra

$$1 < \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n+1} < \frac{6n+3}{3n+2}.$$

(2014/1) Az a_1, a_2, \dots, a_{100} számok mindegyike 1 vagy -1 , az összegük 0. Bizonyítsa be, hogy létezik olyan $0 \leq n \leq 75$ egész szám, amelyre

$$a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+25} = 1.$$

(2013/1) Legyen $f(x) = \ln((1 + e^x)^2)$. Számítsa ki az

$$f'(-2012) + f'(-2010) + f'(-2008) + \dots + f'(0) + \dots + f'(2010) + f'(2012)$$

kifejezés értékét.

(2015/3) Tekintsük az

$$f(x) = 2x^3 - 3(2p + 1)x^2 + 3p(p + 1)x + 1$$

függvényt! Határozza meg a p paraméter azon értékeit, amelyek a függvény lokális szélsőérték helyei közé esnek!

¹A világhírű magyar matematikusról, Hajós Györgyről elnevezett versenyt 1978-ban alapították a műszaki főiskolák hallgatói számára. Azóta a verseny szabályzatát számos alkalommal módosították, jelenleg bármely nem matematika alapszakon tanuló alapszakos hallgató részt vehet a versenyen előzetes nevezés alapján. 2018-ban immár a 40. alkalommal kerül megrendezésre a verseny. A 2017. évi verseny honlapja: <https://hajos2017.math.bme.hu/>

(2017/2) Határozza meg az a, b, c valós számok értékét, hogy az

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}, \quad f(x) = \frac{ax^4 + bx^2 + c}{x^4 - 1}$$

függvény legnagyobb alsó korlátja -2 , legkisebb felső korlátja 2 legyen.

(2016/1) Tekintsük az

$$f(x) = a - \sqrt{a^2 - x\sqrt{a^2 - x^2}}, \quad a \in \mathbb{R}^+$$

függvényt. Határozza meg az a paraméter azon értékeit, amelyekre a függvénynek szélsőértéke van az $x = 1$ helyen! (2016/1)

(2016/2) Bizonyítsa be, hogy az $\frac{1}{2}$ területű háromszögek kerülete legalább 3 egység!

(2014/2) Legyen egy forgáskúp alapkörének sugara r , magassága $2r$. Csökkentsük a kúp magasságát x -szel és ugyanennyivel növeljük alapkörének sugarát. Milyen x értéknél lesz a keletkezett kúp és az eredeti kúp térfogatának aránya maximális? Mekkora ebben az esetben a két kúp közös részének térfogata?

(2013/2) Határozza meg az összes olyan $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ függvényt, amely minden valós x és y esetén kielégíti az

$$f((x - y)^2) = (f(x))^2 - 2xf(y) + y^2$$

függvényegyenletet.