MATEMATIKA VERSENY

Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar, 2016/2017.

1. Feladat. A Kerek-tó középpontjától keletre, a tó sugarának háromszorosával megegyező távolságra található Andrásfalva, Andrásfalvától pedig északra pontosan ugyanilyen távolságra van Bélafalva. A két település közös horgásztanyát akar létesíteni a tó partján, de mindkét falu ragaszkodik ahhoz, hogy tőlük közvetlen út vezessen a tanyához. Az útépítés sajnos nagyon drága, a távolság négyzetével arányos. Hová építsék a horgásztanyát, hogy a lehető legkevesebbet kelljen az utakra költeni?

2. Feladat. Legyen P tetszőleges egész együtthatós polinom.

(1) Igazoljuk, hogy minden $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \neq b)$ esetén $b - a \mid P(b) - P(a)$.
(2) Igazoljuk, hogy ha $a, b, c \in \mathbb{R}$ számokra $P(a) = b$, $P(b) = c$ és $P(c) = a$, akkor $a = b = c$.
(3) Adjuk meg az

$$x^{2016} - 2x^{2015} + 3x^{2014} - 4x^{2013} + \ldots - 2014x^3 + 2015x^2 - 2016x + 2017$$

polinom maradékát az $(x - 1)$ polinommal való osztáskor.

3. Feladat. Legyen n természetes szám. Tekintsünk egy $n \times n$-es mátrixot, melynek elemei az $1, 2, \ldots n^2$ számok, amelyeket a bal felső saroktól kezdve balról jobbra, sorról sorra haladva nagyság szerinti sorrendben írunk be a mátrixba. A mátrix elemei közül pontosan n-et kiválasztunk, minden sorból és minden oszlopból pontosan egyet. Határozzuk meg, hogy milyen értékeket vehet fel a kiválasztott számok összege.

4. Feladat. Bizonyítsuk be, hogy ha $x > 0$, akkor

$$\left(\frac{1}{2}\right)^x + x^{\frac{1}{2}} > 1.$$

Minden feladat 25 pontot ér. A versenyen használható bármilyen kommunikációra nem alkalmas eszköz (számológép, könyv, jegyzet).

Gödöllő, 2016. november 30.

Jó munkát!