

MATEMATIKA VERSENY

Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar, 2016.

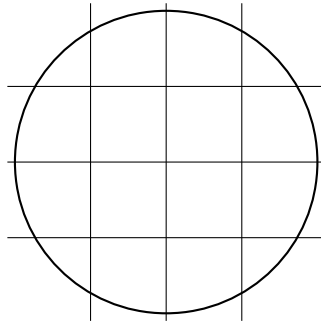
1. **Feladat.** Számítsa ki a következő határértéket:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} e^{n \sin \frac{1}{n} + \frac{1}{n} \sin n}.$$

2. **Feladat.** Legyen $P(x) := x^3 + ax^2 + bx + c$ tetszőleges harmadfokú polinom, $a, b, c \in \mathbb{R}$. Bizonyítsa be, hogy P' polinom akkor és csak akkor osztja a P polinomot, ha

$$P(x) = \left(x + \frac{a}{3}\right)^3.$$

3. **Feladat.** Lipót egy csöndes este családi pizzát rendel, melynek sugara 20 centiméter. Lázadó természete miatt Lipót azonban a pizzát nem szeletekre, hanem függőlegesen és vízszintesen (az ábrán látható módon) 16 részre vágja. Mekkora lesz a legkisebb darab pizzarész területe?



4. **Feladat.** Tekintsük azokat a négyzet alapú hasábokat, amelyek testátlójának hossza T . Ezen hasábok közül melyiknek maximális a lapátlók hosszának összege?

5. **Feladat.** Legyen

$$a_n := \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}} \left(\frac{3 - \sqrt{5}}{2} \right)^n.$$

Igazolja, hogy bármely $n \in \mathbb{N}_0$ esetén $a_n \in \mathbb{Z}$.

Minden feladat 20 pontot ér. A versenyen használható bármilyen kommunikációra nem alkalmas eszköz (számológép, könyv, jegyzet).

Gödöllő, 2016. március 1.

Jó munkát!