MATEMATIKA VERSENY

Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar, 2015.

1. Feladat. Határozza meg $\log_2 x - \log_2 y$ értékét, ha x és y pozitív számok és teljesül, hogy

$$4x^2 - 7y^2 + 27xy = 0.$$

2. Feladat. Legyen (x_n) valós számoknak olyan sorozata, amelyre $x_{n+1} := x_n + n$, $x_0 := 0$.

(a) Igazoljuk, hogy a sorozat tagjai között van prímszám.
(b) Határozzuk meg az alábbi határértéket:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_{n+1} - x_n}{x_n - x_{n-1}}.$$

(c) Adjuk meg a sorozat n-edik tagját zárt alakban.
(d) Bizonyítsuk be, hogy $n \geq 1$ esetén $x_n x_{n+1}$ osztható 3-mal.

3. Feladat. Tekintsünk egy négyzet alapú gúlát, melynek minden éle egységnyi hosszúságú. A gúlába írható téglatestek közül melyiknek maximális a térfogata?

4. Feladat. Legyen $x \in \mathbb{R}^+$, $f(x) := x^a e^{-2x}$, ahol $a > 1$ valós paraméter.

(a) Mutassuk meg, hogy tetszőleges a esetén a függvénynek pontosan két inflexiós pontja van.
(b) Adjuk meg az a paraméter értékét úgy, hogy az inflexiós pontok távolsága 2 legyen.
(c) Mutassuk meg, hogy az inflexiós pontok szimmetrikusan helyezkednek el a függvény szélsőértékhelyére vonatkoztatva.

5. Feladat. Tizenegy kalóz talált egy aranyérmékkel teli kincsesládát. A teljes zsákmányt egyenlő részekre szeretnék osztani. Az osztozkodás során azonban 5 érme kimaradt, így az egyik kalózt a tengerbe dobták. Ezután újra elosztották az érméket, ekkor 3 érme maradt ki, ezért egy újabb társuktól szabadultak meg. Ezt követően már sikerült az érméket egyenlően kiosztani egymás között. Mennyi az a legkevesebb arany, ami a ládában lehetett?

Minden feladat 20 pontot ér. A versenyen használható bármilyen kommunikációra nem alkalmas eszköz (számológép, könyv, jegyzet).

Gödöllő, 2015. február 25.

Jó munkát!