MATEMATIKA VERSENY

Szent István Egyetem Gépészmérnöki Kar, 2014.

1. Feladat. Az $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ számot *zamatosnak* nevezzük, ha létezik pozitív egész számoknak olyan $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$ sorozata, amelyre

$$a_k = n \quad \text{és} \quad \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{a_i} = 1.$$

Például a 6 zamatos szám, ugyanis az $a_1 := 2$, $a_2 := 3$ és $a_3 := 6$ választással teljesíti a feltételek.

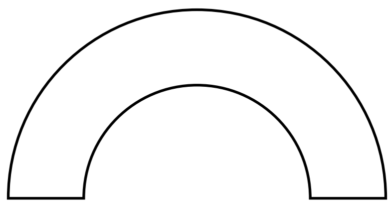
(a) Döntsük el, hogy a 4 zamatos szám-e.
(b) Igazoljuk, hogy ha n zamatos szám, akkor $2n$ is az.
(c) Bizonyítsuk be, hogy prímszám nem lehet zamatos.

2. Feladat. Legyen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ folytonos függvény, amelyre minden $x, y \in \mathbb{R}$ esetén

$$f(x + y) = f(x)f(y).$$

(a) Bizonyítsuk be, hogy $f(0) = 0$ vagy $f(0) = 1$.
(b) Igazoljuk, hogy létezik olyan $c \in \mathbb{R}$, hogy bármely $n \in \mathbb{N}$ esetén $f(n) = c^n$.
(c) Határozzuk meg $f(5)$ értékét, ha $f(2) = 5$.

3. Feladat. Adott az ábrán látható koncentrikus félkörökből épített szoba. A szoba pontjai között a maximálisan belátható távolság 12 méter. Határozzuk meg a szoba területét. (Adott pontból egy pont belátható, ha a pontokat összekötő szakasznak nincs az alakzaton kívüli pontja.)



4. Feladat. Legyen $g(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$ és $f(x) := 1 + x - R \cdot g(x)$, ahol $R > 1$ valós paraméter.

(a) Mutassuk meg, hogy f-nek van pozitív zérushelye.
(b) Mutassuk meg, hogy f inflexiós pontjai szimmetrikusak az origóra.
(c) Mutassuk meg, hogy ha valamely x_0-ra

$$x_0 \cdot g(x_0) + \frac{1}{R} = 0$$

teljesül, akkor f-nek x_0-ban szélsőértéke van.

5. Feladat. Legyen adott egy r sugarú kör egy érintőjével. Tekintsük azokat a téglalapokat, amelyek két szomszédos csúcsa a körön, a másik kettő pedig az érintőn van. Melyik téglalapnak lesz ezek közül maximális a területe?

Minden feladat 20 pontot ér. A versenyen használható bármilyen kommunikációra nem alkalmas eszköz (számológép, könyv, jegyzet).

Gödöllő, 2014. március 18.

Jó munkát!